

1 线性代数和NDArray

概要

- 深度学习简要概述
- 线性代数
- NDArray

线性代数

元素

➤ 简易运算



$$c = a + b$$

$$c = a \cdot b$$

$$c = \sin a$$

➤ 范数

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ -a & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

向量

➤ 简易运算



$$c = a + b \quad \text{where } c_i = a_i + b_i$$

$$c = \alpha \cdot b \quad \text{where } c_i = \alpha b_i$$

$$c = \sin a \quad \text{where } c_i = \sin a_i$$

➤ 范数

$$\|a\|_2 = \left[\sum_{i=1}^m a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|a\| \geq 0 \text{ for all } a$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

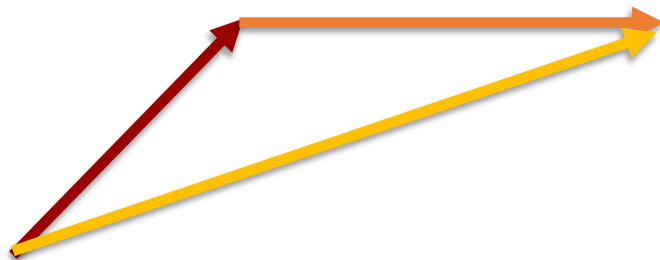
$$\|a \cdot b\| = |a| \cdot \|b\|$$

向量

➤ Mathematician's 'parallel for all

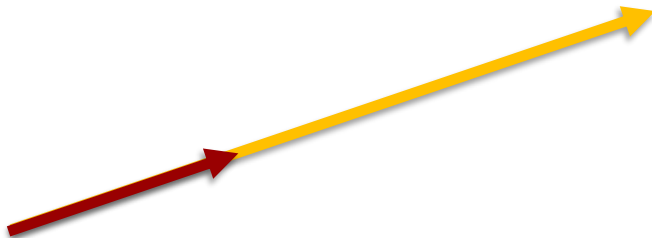
➤ $c = a + b$

➤ 向量加



➤ $c = \alpha \cdot b$

➤ 数乘



向量

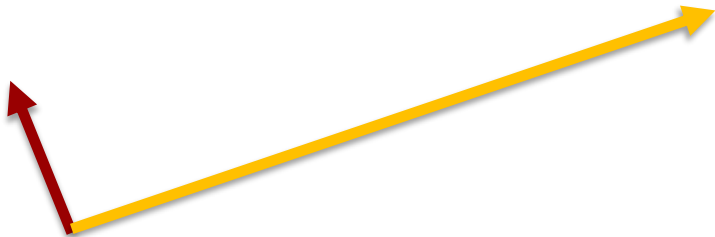
➤ 点积

$$a^T b = \sum_i a_i b_i$$



➤ 正交性

$$a^T b = \sum_i a_i b_i = 0$$



➤ 如果我们有兩個向量與第三個正交，它們的線性組合向量也正交

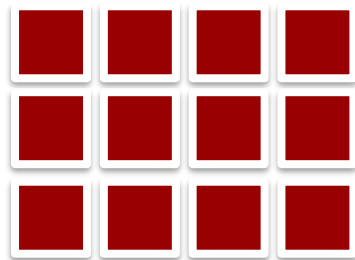
矩阵

➤ 简易运算

$$C = A + B \quad \text{where } C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$C = \alpha \cdot B \quad \text{where } C_{ij} = \alpha B_{ij}$$

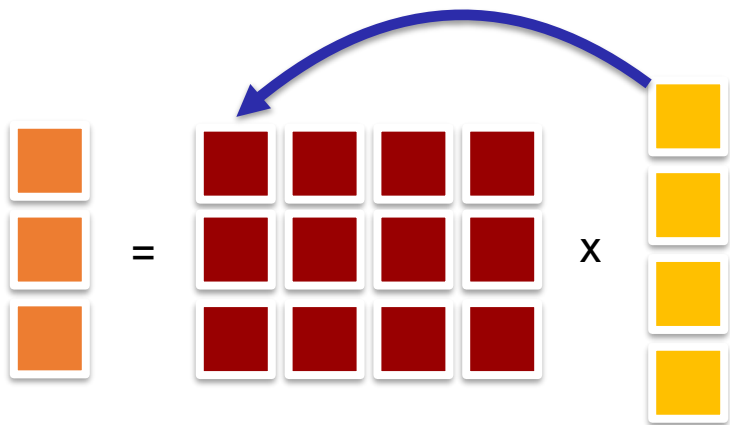
$$C = \sin A \quad \text{where } C_{ij} = \sin A_{ij}$$



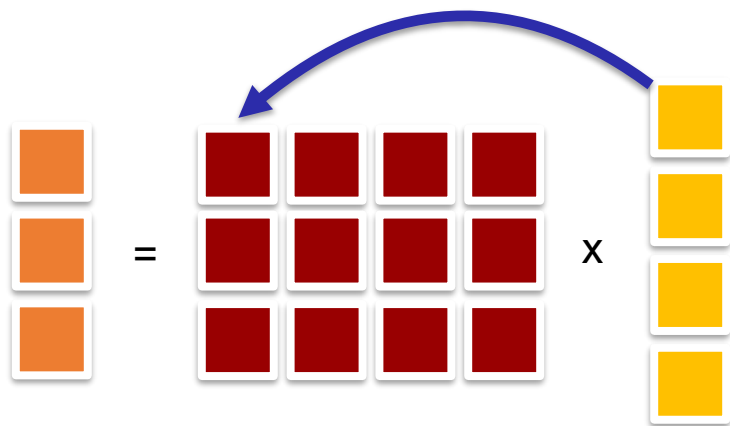
矩阵

⑩ 矩阵相乘 (矩阵 x 向量)

$$c = Ab \text{ where } c_i = \sum_j A_{ij}b_j$$



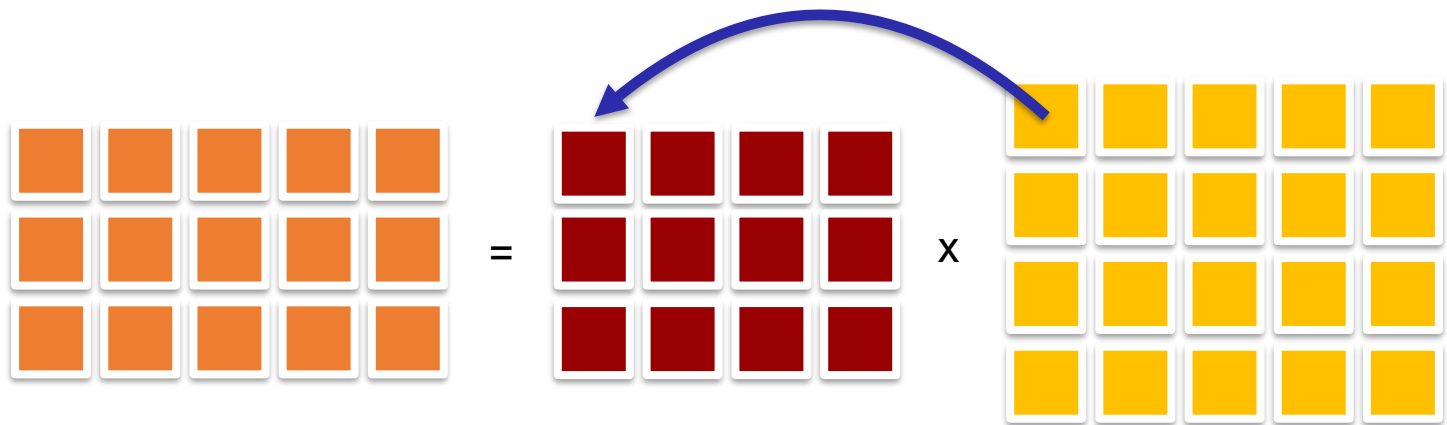
矩阵



矩阵

⑩ 矩阵相乘 (矩阵 x 矩阵)

$$C = AB \text{ where } C_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk}$$



矩阵

➤ 范数

$$c = A \cdot b \text{ hence } \|c\| \leq \|A\| \cdot \|b\|$$

➤ 常见范数

➤ Frobenius 范数

$$\|A\|_{\text{Frob}} = \left[\sum_{ij} A_{ij}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

➤ H-infinity 范数

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m \{m,n\}} \sigma_i^2}$$

矩阵

➤ 特征值和特征向量

- 对于一个给定的线性变换A，它的特征向量x，经过这个线性变换之后，得到的新向量仍然与原来的v保持在同一条直线上，但其长度或方向也许会改变。

特征向量

$$Ax = \lambda x$$

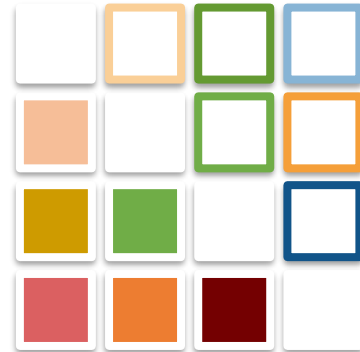
特征值

- 对称矩阵总会有相应的特征向量和特征值

特殊矩阵

➤ 对称性 & 非对称性

$$A_{ij} = A_{ji} \text{ and } A_{ij} = -A_{ji}$$



➤ 正定性

$$\|x\|^2 = x^\top x \geq 0 \text{ generalizes to } x^\top A x \geq 0$$

➤ (特征值均为非负数)

Special Matrices

➤ 正交矩阵

- 所有的列向量都是单位正交向量
- 所有的行向量都是单位正交向量
- 可以写为

$$UU^T = \mathbf{I}$$

➤ 置换矩阵

- 矩阵的每一行和每一列的元素中只有一个1,其余元素都为0

P where $P_{ij} = 1$ if and only if $j = \pi(i)$

NDArray

NDArray

- NDArray是存储和变换数据的主要工具
- NDArray提供GPU计算和自动求梯度等更多功能，这使NDArray更加适合深度学习

0-d (元素)



1.0

一个类标签

1-d (向量)



[1.0, 2.7, 3.4]

一个特征向量

2-d (矩阵)

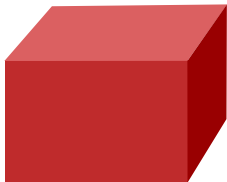


[[1.0, 2.7, 3.4]
[5.0, 0.2, 4.6]
[4.3, 8.5, 0.2]]

一个特征矩阵

NDAarray

3-d



```
[[[0.1, 2.7, 3.4]
 [5.0, 0.2, 4.6]
 [4.3, 8.5, 0.2]]
 [[3.2, 5.7, 3.4]
 [5.4, 6.2, 3.2]
 [4.1, 3.5, 6.2]]]
```

一张RGB图像
(长 x 宽 x 高)

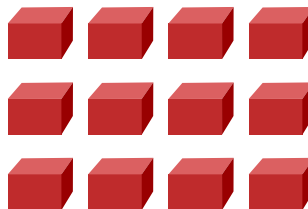
4-d



```
[[[[...
    ...
    ...]]]
```

一组RGB图像
(批量大小 x 长
x 宽 x 高)

5-d



```
[[[[[...
     ...
     ...]]]]]
```

一组RGB视频
(批量大小 x 时间
x 长 x 宽 x 高)

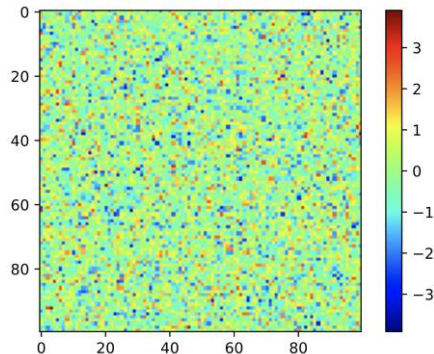
创建NDArray

➤ 按如下标准创建NDArray

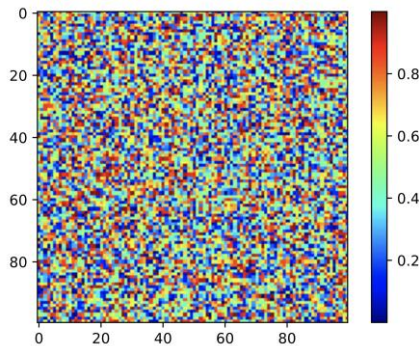
- 形状(shape), e.g. 3 x 4
- 元素值, e.g. 全部为0, 或者随机值

100 x100 矩阵

正态分布



均匀分布



元素索引

一个元素: [1, 2]

	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	5	6	7	8
2	9	10	11	12
3	13	14	15	16

一行: [1, :]

	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	5	6	7	8
2	9	10	11	12
3	13	14	15	16

一列:[:, 1]

	0	1	2	3
0	1	2	3	4
1	5	6	7	8
2	9	10	11	12
3	13	14	15	16

总结

- 深度学习简要概述
- 线性代数
- NDArray